من انجاز : ذ.أحمد رضواني
بتاريخ : 2010/02/26

www.ahmedmath.c.la

المستوى : 3.ثِ.إعدادي
أقا - نيابة طاطا

المتجهات و الإزاحة

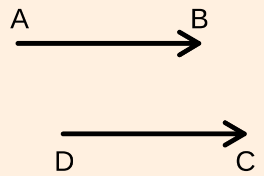
I. تساوي متجهتين :

تعريف : نقول أن متجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{DC}$ متساويتين ، إذا كان لهما : نفس الإتجاه ، نفس المنحى و نفس الطول .

لدينا : المتجهتان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{DC}$ لهما :

* نفس الإتجاه (لأن $(AB)//(DC)$)
* نفس المنحى (من A نحو B)
* نفس الطول (لأن $AB = DC$)

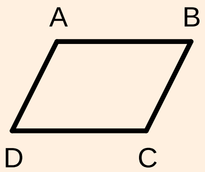
إذن : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$



خاصية :
* إذاكان : $ABCD$ متوازي أضلاع فإن : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
* إذاكان : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ فإن : $ABCD$ متوازي أضلاع .

لدينا : $ABCD$ متوازي الأضلاع

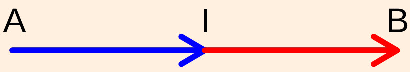
إذن : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ و $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$



خاصية :
* إذاكان : I منتصف القطعة $[AB]$ فإن $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.
* إذاكان : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ فإن I منتصف القطعة $[AB]$.

لدينا : I منتصف $[AB]$

إذن : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$



تمرين 15 ص 184 (المفيد) ليكن ABC مثلث ،

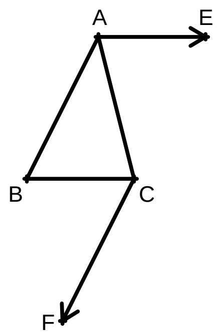
1) أنشئ النقطة E بحيث $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$.
2) حدد طبيعة $ABCE$.
3) بين أن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EC}$.
4) أنشئ F بحيث $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AB}$ ثم بين أن C منتصف القطعة $[EF]$.

حل التمرين 15 ص 184 (المفيد)

1) أنظر الشكل .
2) لدينا : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$ إذن : $ABCE$ متوازي الأضلاع .
3) لدينا : $ABCE$ متوازي الأضلاع إذن : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EC}$.
4) * أنظر الشكل .

*لدينا : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EC}$ و $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CF}$

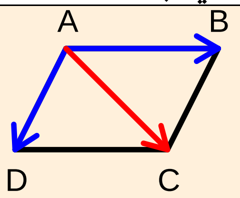
إذن : $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{CF}$ ومنه : C منتصف $[EF]$.



II. مجموع متجهتين :

تعريف : $ABCD$ متوازي الأضلاع ، المتجهة $\overrightarrow{AC}$ هي مجموع المتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$

ونكتب : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.



لدينا : $ABCD$ متوازي الأضلاع

إذن : $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$

علاقة شال : مهما كانت النقط A و B و C لدينا : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

مثال : لدينا: $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{CL}$ و $\overrightarrow{ML}+\overrightarrow{LK}=\overrightarrow{MK}$

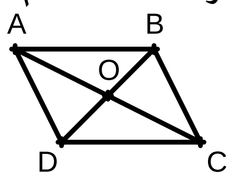
و $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EN}+\overrightarrow{NG}+\overrightarrow{GM}=\overrightarrow{AM}$

متجهات خاصة :

*المتجهة المنعدمة : هي المتجهة $\overrightarrow{AA}$ أو $\overrightarrow{BB}$ أو $\overrightarrow{MM}$ ... ونرمز لها ب $\overrightarrow{0}$.

* مقابل المتجهة $\overrightarrow{AB}$: هو المتجهة $\overrightarrow{BA}$ ولدينا : $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$

حل التمرين 15 ص 184 (المفيد) ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع مركزه O ، أتمم :



$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}$

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$ (شال)

$\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}$

$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (شال)

حل التمرين 17 ص 184 (المفيد) ضع مكان النقط المتجهة المناسبة :

$\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{EE}=\overrightarrow{0}$

$\overrightarrow{JK}+\overrightarrow{CJ}=\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{JK}=\overrightarrow{CK}$

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{IA}$

تمرين 14 ص 184 (المفيد)

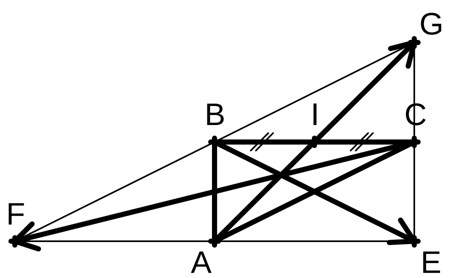
ليكن ABC مثلث قائم في B و I منتصف القطعة $[BC]$.

1) أنشئ E بحيث : $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BE}$ ، حدد طبيعة الرباعي $ABCE$.

2) أنشئ F بحيث : $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CF}$ ، ماذا تمثل A بالنسبة للقطعة $[EF]$.

3) أنشئ G بحيث : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AG}$ ، ماذا تمثل A بالنسبة للقطعة $[AG]$.

حل تمرين 14 ص 184 (المفيد)



1) أنظر الشكل .

لدينا : $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BE}$ إذن : $ABCE$ متوازي أضلاع .

2) أنظر الشكل .

لدينا : $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CF}$ إذن : $BCAF$ متوازي أضلاع .

ومنه : $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{CB}$ (1)

ولدينا : $ABCE$ متوازي أضلاع إذن : $\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{CB}$ (2)

ومن (1) و (2) نستنتج أن $\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{AF}$ إذن : A منتصف القطعة $[EF]$.

3) أنظر الشكل .

لدينا : $\vec{AB}+\vec{AC}=\vec{AG}$ إذن : $ABGC$ متوازي أضلاع .

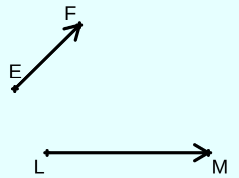
ومنه : $\vec{AB}=\vec{CG}$ (1)

ولدينا : $ABCE$ متوازي أضلاع إذن : $\vec{AB}=\vec{EC}$ (2)

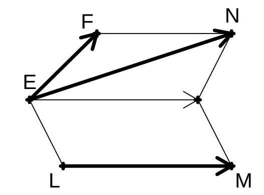
ومن (1) و (2) نستنتج أن $\vec{EC}=\vec{CG}$ إذن : C منتصف القطعة $[EG]$.

تمرين 5 : نعتبر الشكل (1) :

أنشئ المتجهة $\vec{EN}$ بحيث : $\vec{EN}=\vec{EF}+\vec{LM}$.



شكل 1



شكل 2

الحل :

لكي ننشئ $\vec{EN}$ يجب أن ننشئ أولا متجهة تساوي $\vec{EN}$ و أصلها E ، أنظر الشكل (2)

III. ضرب متجهة في عدد حقيقي :

تعريف : المتجهة $\vec{AC}$ هي جداء المتجهة $\vec{AB}$ في العدد الحقيقي k ،
ونكتب : $\vec{AC}=k\vec{AB}$.

* إذاكان : k موجب فإن المتجهتان $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ لهما نفس المنحى .
* إذاكان : k سالب فإن المتجهتان $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ لهما منحيان متعاكسان .

مثال : لدينا : $\vec{AB}=4\vec{AC}$ إذن : $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ لهما نفس المنحى (لأن $4>0$)

لدينا : $\vec{EF}=-7\vec{MN}$ إذن : $\vec{MN}$ و $\vec{EF}$ لهما منحيان متعاكسان (لأن $-7<0$)

خاصية : إذا كان : $\vec{AC}=k\vec{AB}$ فإن : النقط A و B و C مستقيمية .

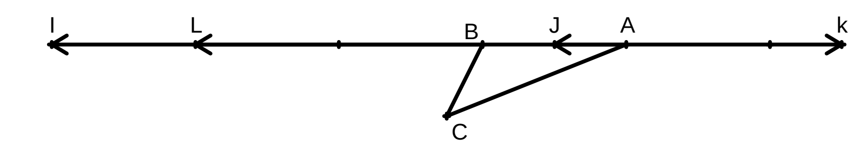
لدينا : $\vec{ME}=-2\vec{ML}$ إذن : النقط M و E و L مستقيمية .

خاصية : إذا كان : $\vec{GH}=k\vec{AB}$ فإن : $(GH)//(AB)$.

تمرين 12 ص 184 (المفيد) ليكن ABC مثلث ،

1) أنشئ I بحيث : $\vec{BI}=3\vec{AB}$. 2) أنشئ J بحيث : $\vec{AJ}=\frac{1}{2}\vec{AB}$.

3) أنشئ K بحيث : $\vec{AK}=\frac{-3}{2}\vec{AB}$. 4) أنشئ L بحيث : $\vec{BL}=-2\vec{BA}$.



لدينا : $\vec{BI}=3\vec{AB}$
إذن : $\vec{AB}$ و $\vec{BI}$ لهما نفس الإتجاه ، نفس المنحى
و الطول $3AB=BI$

تمرين 22 ص 185 (المفيد)

ليكن ABC مثلث . ولتكن M و N بحيث : $\overrightarrow{AN}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.

1) أنشئ M و N .

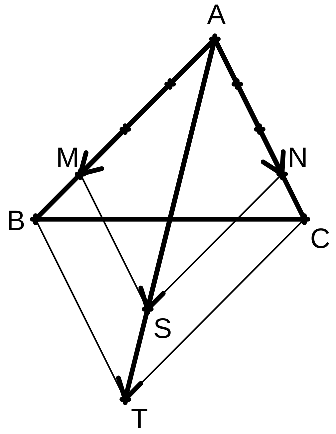
2) بين أن $\overrightarrow{MN}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$.

3) أنشئ S و T بحيث : $\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}$ و $\overrightarrow{AT}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

بين أن : $(MS)//(BT)$ و أن : $(NS)//(CT)$.

4) استنتج أن : A و S و T نقط مستقيمية .

حل التمرين 22 ص 185 (المفيد)



1) أنظر الشكل .

2) لدينا : $\overrightarrow{AN}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ يعني : $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

يعني : $\overrightarrow{MN}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AM}$ يعني : $\overrightarrow{MN}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

يعني : $\overrightarrow{MN}=\frac{3}{4}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{3}{4}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}\right)=\frac{3}{4}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$

ومنه : $\boxed{\overrightarrow{MN}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}}$

3) أنظر الشكل .

* لنبين أن $(MS)//(BT)$:

لدينا : $\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}$ إذن : $AMSN$ متوازي أضلاع ومنه : $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{MS}$

ولدينا : $\overrightarrow{AT}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ إذن : $ABTC$ متوازي أضلاع ومنه : $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BT}$

وبما أن : $\overrightarrow{AN}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ فإن : $\overrightarrow{MS}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BT}$ إذن : $(MS)//(BT)$

* لنبين أن $(NS)//(CT)$:

لدينا : $AMSN$ متوازي أضلاع إذن : $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{NS}$

لدينا : $ABTC$ متوازي أضلاع إذن : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CT}$

وبما أن : $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ فإن : $\overrightarrow{NS}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CT}$ إذن : $(NS)//(CT)$

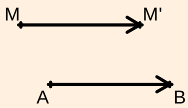
4)

لدينا : $\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}$ يعني : $\overrightarrow{AS}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}=\frac{3}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{3}{4}\overrightarrow{AT}$

إذن : $\overrightarrow{AS}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AT}$ ومنه : النقط A و S و T نقط مستقيمية .

IV. الإزاحة :

خاصية : A و B و M نقط من المستوى
نقول أن : النقطة M' هي صورة النقطة M بالإزاحة التي تحول A إلى B
إذا كان : $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{AB}$.



لدينا : $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{AB}$
إذن : صورة النقطة M بالإزاحة التي تحول A إلى B هي النقطة M' .

ملاحظة : نقول الإزاحة التي تحول A إلى B أو نقول الإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{AB}$

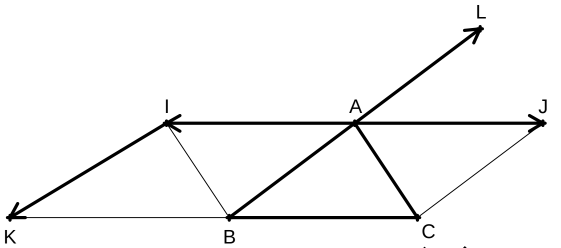
خصائص :
* صورة مستقيم بإزاحة هو مستقيم يوازيه .
* صورة قطعة بإزاحة هي قطعة تقايسها .
* صورة دائرة بإزاحة هي دائرة لها نفس الشعاع و مركزها هو صورة مركز الدائرة الأولى .
* صورة زاوية بإزاحة هي زاوية تقايسها .

تمرين 3 ص 182 (المفيد)

ليكن ABC مثلث ، و I و J و K و L نقط بحيث : $\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{CB}$

1) أ) حدد صورة المثلث ABC بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{CB}$.
ب) حدد صورة المثلث ABC بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{BA}$.
2) بين أن النقط A و B و A هي منتصفات $[IJ]$ و $[CK]$ و $[BL]$ على التوالي .

حل التمرين 3 ص 182 (المفيد)



1) أ) لدينا :
صورة A بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{CB}$ هي I
صورة B بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{CB}$ هي K
صورة C بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{CB}$ هي B
إذن : صورة المثلث ABC بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{CB}$ هو المثلث IKB .

ب) لدينا :
صورة A بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{BA}$ هي L
صورة B بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{BA}$ هي A
صورة C بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{BA}$ هي J
إذن : صورة المثلث ABC بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{BA}$ هو المثلث LAJ .

2) * لنبين أن A منتصف $[IJ]$:
لدينا : $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{CB}$ إذن : $\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{BC}$ (1) ولدينا : $\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{BC}$ (2)
ومن (1)و(2) نستنتج أن $\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{AJ}$ إذن : A منتصف $[IJ]$.

* لنبين أن B منتصف $[CK]$:
لدينا : $\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{AB}$ إذن : $ABKI$ متوازي الأضلاع ومنه : $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{BK}$
ونعلم أن : $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{CB}$ إذن : $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BK}$ ومنه : B منتصف القطعة $[CK]$.