الحساب المثلثي

نشاط تذكيري 1 :

تذكر أن : $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$; $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+cb}{bd}$

أحسب :

$A=\frac{3}{2}+\frac{5}{2}$; $B=\frac{7}{4}-\frac{9}{4}$; $C=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$; $D=\frac{2}{7}-\frac{5}{3}$

$E=1+\frac{5}{7}$; $F=1-\frac{5}{2}$; $G=2+\frac{5}{4}$; $-3-\frac{7}{5}$

نشاط تذكيري 2 :

تذكر أن التبسيط هو تجميع الحدود المتشابهة .

$A=3x+5x-9x$; $B=-3x+x^2+5-2x^2+3x-7$

بسط : $D=-x+\frac{\sqrt{3}}{2}-3x-\frac{5\sqrt{3}}{3}$; $C=2\sqrt{3}-5\sqrt{2}-8-\sqrt{3}+3\sqrt{2}+8$

نشاط تذكيري 3 :

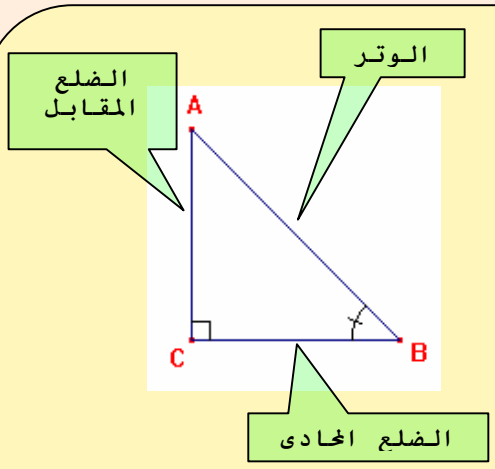
حل المعادلات :

$x+3=5$; $x-8=2$; $2x=7$; $\frac{x}{3}=5$; $8+x=-4$; $\frac{3}{x}=7$

$x-7=1$; $5x=-3$; $2-x=8$; $3x+2=4$; $-7x+1$; $\frac{2-2x}{x}=1$

I. النسب المثلثية لزاوية حادة :

تعريف : ABC مثلث قائم الزاوية في C :



$\cos\hat{B}=\frac{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } \hat{B}}{\text{طول الوتر}}$

$\sin\hat{B}=\frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } \hat{B}}{\text{طول الوتر}}$

$\tan\hat{B}=\frac{\text{طول الضلع المقابل للزاوية } \hat{B}}{\text{طول الضلع المجاور للزاوية } \hat{B}}$

نقرأ :

$\cos\hat{B}$: جيب تمام الزاوية B

$\sin\hat{B}$: جيب الزاوية $\hat{B}$

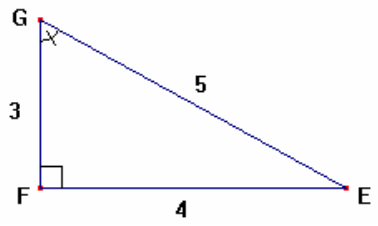
$\tan\hat{B}$: ظل الزاوية $\hat{B}$

تمرين 1 :

EFG مثلث قائم الزاوية في F ، بحيث : $EF=4$; $FG=3$; $EG=5$

أحسب النسب المثلثية للزاوية G .

حل تمرين 1 :



* لنحسب $\cos\hat{G}$:

لدينا : $\cos\hat{G}=\frac{FG}{EG}$

ت.ع : $\boxed{\cos\hat{G}=\frac{3}{5}}$

* لنحسب $\sin\hat{G}$:

لدينا : $\sin\hat{G}=\frac{FE}{EG}$

ت.ع : $\boxed{\sin\hat{G}=\frac{4}{5}}$

---

* لنحسب $\tan\hat{G}$:

لدينا : $\tan\hat{G}=\frac{FE}{FG}$

ت.ع : $\boxed{\tan\hat{G}=\frac{4}{3}}$

تمرين 2 : (تمرين 20 ص 145 المفيد)

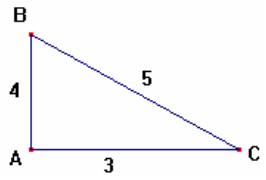
ABC مثلث بحيث : $BC=5$; $AC=3$; $AB=4$

1) بين أن ABC قائم الزاوية .

2) أحسب النسب المثلثية للزاوية $\hat{B}$

3) أحسب النسب المثلثية للزاوية $\hat{C}$

حل تمرين 2 :



1) لدينا : طول أكبرضلع هو $BC=5$

إذن : $BC^2=5^2=25$

ولدينا : $AB^2+AC^2=4^2+3^2=16+9=25$

إذن : $BC^2=AB^2+AC^2$

ومنه : حسب م.ف.ع المثلث ABC قائم في A .

---

2)

* لنحسب $\cos\hat{B}$:

لدينا : $\cos\hat{B}=\frac{AB}{BC}$

ت.ع : $\boxed{\cos\hat{B}=\frac{4}{5}}$

* لنحسب $\sin\hat{B}$:

لدينا : $\sin\hat{B}=\frac{AC}{BC}$

ت.ع : $\boxed{\sin\hat{B}=\frac{3}{5}}$

* لنحسب $\tan\hat{B}$:

لدينا : $\tan\hat{B}=\frac{AC}{AB}$

ت.ع : $\boxed{\tan\hat{B}=\frac{3}{4}}$

---

3)

* لنحسب $\cos\hat{C}$:

لدينا : $\cos\hat{C}=\frac{AC}{BC}$

ت.ع : $\boxed{\cos\hat{C}=\frac{3}{5}}$

* لنحسب $\sin\hat{C}$:

لدينا : $\sin\hat{C}=\frac{AB}{BC}$

ت.ع : $\boxed{\sin\hat{C}=\frac{4}{5}}$

* لنحسب $\tan\hat{C}$:

لدينا : $\tan\hat{C}=\frac{AB}{AC}$

ت.ع : $\boxed{\tan\hat{B}=\frac{4}{3}}$

جدول النسب المثلثية لبعض الزوايا :

	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
tan	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	لايوجد

II. خصـــائص :

خاصية 1 : x قياس زاوية حادة .

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

خاصية 2 : x قياس زاوية حادة .

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

خاصية 3 :

إذا كان : x و y زاويتان متتامتان (يعني : $x+y=90^o$)
فإن :

$$\sin x = \cos y \quad ; \quad \cos x = \sin y$$

$$\tan x = \frac{1}{\tan y}$$

مثال :

لدينا : الزاويتان $13°$ و $77°$ متتامتان
إذن :

$$\sin 13° = \cos 77° \quad ; \quad \cos 13° = \sin 77°$$

$$\tan 13° = \frac{1}{\tan 77°}$$

تمرين 3 : (تمرين 13 ص 145 المفيد)
أحسب مايلي :

$$A = 2\cos 30^0 - 2\sqrt{3}\cos 60^0 + 1$$

$$B = 4\cos 45^0 \sin 45^0 + 2\sin 60^0 - \tan 30^0$$

$$C = 4\cos 45^0 - 5\sin^2 30^0 + 3\tan^2 60$$

$$D = 5\tan^2 30^0 + 5\tan^2 45^0 - \frac{1}{\cos^2 45^0} - \frac{1}{\cos^2 30^0}$$

$$E = \frac{\tan 45^0 - \tan 60^0}{1 + \tan 45^0 \tan 60^0}$$

$$B = 4\cos 45^0 \sin 45^0 + 2\sin 60^0 - \tan 30^0$$

$$= \cancel{4} \times \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} + \cancel{2} \times \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$= 2 + \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\boxed{B = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{3}}$$

$$A = 2\cos 30^0 - 2\sqrt{3}\cos 60^0 + 1$$

$$= 2 \times \frac{1}{2} - 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 1$$

$$= 1 - 3 + 1$$

$$\boxed{A = -1}$$

$$C = 4\cos 45^0 - 5\sin^2 30^0 + 3\tan^2 60 = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \times \left(\sqrt{3}\right)^2$$

$$C = 2\sqrt{2} - \frac{5}{4} + 9 = \boxed{\frac{8\sqrt{2} + 31}{4}}$$

تمرين 4 : (تمرين 7 ص 144 المفيد)

ليكن x قياس زاوية حادة .

1) حدد $\cos x$ و $\tan x$ علماً أن $\sin x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

2) حدد $\sin x$ و $\tan x$ علماً أن $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{3}$

3) حدد $\cos x$ و $\sin x$ علماً أن $\tan x = \sqrt{24}$

حل التمرين 4 :

1) * لنحسب $\cos x$:

نعلم أن : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ت.ع : $\cos^2 x + \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 = 1$ يعني : $\cos^2 x + \frac{8}{9} = 1$

يعني : $\cos^2 x = 1 - \frac{8}{9} = \frac{9-8}{9} = \frac{1}{9}$ يعني : $\cos x = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$ ومنه : $\boxed{\cos x = \frac{1}{3}}$

* لنحسب $\tan x$:

نعلم أن : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ت.ع : $\tan x = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{\cancel{3}} \times \cancel{3} = 2\sqrt{2}$ ومنه : $\boxed{\tan x = 2\sqrt{2}}$

2) * لنحسب $\sin x$:

نعلم أن : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ت.ع : $\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 + \sin^2 x = 1$ يعني : $\sin^2 x = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2$

يعني : $\sin^2 x = 1 - \frac{5}{9} = \frac{9-5}{9} = \frac{4}{9}$ يعني : $\sin x = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ ومنه : $\boxed{\sin x = \frac{2}{3}}$

* لنحسب $\tan x$:

نعلم أن : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ت.ع : $\tan x = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{2}{\cancel{3}} \times \frac{\cancel{3}}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ومنه : $\boxed{\tan x = \frac{2\sqrt{5}}{5}}$

3) * لنحسب $\cos x$:

نعلم أن : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ إذن : $\boxed{1}$ $\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$

ونعلم أن : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ إذن : $\boxed{2}$ $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

من $\boxed{1}$ و $\boxed{2}$ نستنتج العلاقة : $\tan^2 x = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}$ ت.ع : $\sqrt{24}^2 = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}$

يعني : $24\cos^2 x = 1 - \cos^2 x$ يعني : $24\cos^2 x + \cos^2 x = 1$ يعني : $25\cos^2 x = 1$

يعني : $\cos^2 x = \frac{1}{25}$ يعني : $\cos x = \sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{1}{5}$ ومنه : $\boxed{\cos x = \frac{1}{5}}$

* لنحسب $\sin x$:

نعلم أن : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ت.ع : $\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \sin^2 x = 1$ يعني : $\sin^2 x = 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2$

يعني : $\sin^2 x = 1 - \frac{1}{25} = \frac{25-1}{25} = \frac{24}{25}$ يعني : $\sin x = \sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{\sqrt{24}}{5}$ ومنه : $\boxed{\sin x = \frac{\sqrt{24}}{5}}$

تمرين 5 : (تمرين 16 ص 145 المفيد)

أحسب مايلي : $X_1=\cos 5+2\sin^2 22-\sin 85+2\sin^2 86$

$X_2=\cos^2 14+\cos^2 28+\cos^2 76+\cos^2 62$ و $X_3=5\sin^2 34+3\cos^2 11+5\sin^2 56+3\cos^2 79$

حل التمرين 5 :

$$X_1=\cos 5+2\sin^2 22-\sin 85+2\sin^2 86$$
$$=\cos 5-\sin 85+2\left(\sin^2 22+\sin^2 86\right)$$
$$=\cancel{\cos 5}-\cancel{\cos 5}+2\left(\sin^2 22+\cos^2 22\right)$$
$$=0+2\times 1=2$$
$$\boxed{X_1=2}$$

$$X_3=5\sin^2 34+3\cos^2 11+5\sin^2 56+3\cos^2 79$$
$$=5\left(\sin^2 34+\sin^2 56\right)+3\left(\cos^2 11+\cos^2 79\right)$$
$$=5\left(\sin^2 34+\cos^2 34\right)+3\left(\cos^2 11+\sin^2 11\right)$$
$$=5\times 1+3\times 1=5+3=8$$
$$\boxed{X_3=8}$$

حل التمرين 6: (تمرين 17 ص 145 المفيد)

$$y_1=\sin^2 40-4\cos^2 30+\sin^2 50+\tan 45$$
$$=\sin^2 40+\sin^2 50-4\cos^2 30+\tan 45$$
$$=\sin^2 40+\cos^2 40-4\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+1$$
$$=1-\cancel{4}\times\frac{3}{\cancel{4}}+1=1-3+1=1$$
$$\boxed{y_1=1}$$

$$y_4=\tan 70-\frac{1}{\tan 20}+\frac{2}{\tan 60}$$
$$=\cancel{\tan 70}-\cancel{\tan 70}+\frac{2}{\sqrt{3}}$$
$$\boxed{y_4=\frac{2}{\sqrt{3}}}$$

تمرين 7 : (تمرين 23 ص 146 المفيد)

ليكن ABC مثلث قائم في A ، بحيث : $AC=7$ و $\cos\hat{C}=\frac{3}{5}$

1) أحسب $\sin\hat{C}$ و $\tan\hat{C}$ 2) أحسب النسب المثلثية ل $\hat{B}$ 3) استنتج AB و BC

حل التمرين 7 :

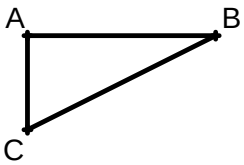
1)* لدينا : $\cos^2\hat{C}+\sin^2\hat{C}=1$ ت.ع : $\left(\frac{3}{5}\right)^2+\sin^2\hat{C}=1$ يعني : $\sin^2\hat{C}=1-\left(\frac{3}{5}\right)^2$

يعني : $\sin^2\hat{C}=1-\frac{9}{25}=\frac{25-9}{25}=\frac{16}{25}$ يعني : $\sin\hat{C}=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$ ومنه : $\boxed{\sin\hat{C}=\frac{4}{5}}$

* لدينا : $\tan\hat{C}=\frac{\sin\hat{C}}{\cos\hat{C}}$ ت.ع : $\tan\hat{C}=\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{4}{\cancel{5}}\times\frac{\cancel{5}}{3}=\frac{4}{3}$ ومنه : $\boxed{\tan\hat{C}=\frac{4}{3}}$

2) لدينا : $\hat{B}$ و $\hat{C}$ متتامتان (لأن $\hat{B}+\hat{C}=90°$)

إذن : $\cos\hat{B}=\sin\hat{C}=\boxed{\frac{4}{5}}$ و $\sin\hat{B}=\cos\hat{C}=\boxed{\frac{3}{5}}$ و $\tan\hat{B}=\frac{1}{\tan\hat{C}}=\frac{1}{\frac{4}{3}}=\boxed{\frac{3}{4}}$



3) لدينا : $\tan B=\frac{AC}{AB}$ ت.ع : $\frac{3}{4}=\frac{7}{AB}$ يعني : $AB=\frac{4\times 7}{3}=\boxed{\frac{28}{3}}$

لدينا : $\sin B=\frac{AC}{BC}$ ت.ع : $\frac{3}{5}=\frac{7}{BC}$ يعني : $BC=\frac{7\times 5}{3}=\boxed{\frac{35}{3}}$